Part V

Annexes

A. Preuve de la proposition 2

Proposition 2 : Le temps d'arrêt optimal pour une recherche dans $\overline{CP}$ appartient à l'ensemble Λ

Proof. . Soit $\overline{\nu}$ un temps d'arrêt, nous allons chercher à construire un temps d'arrêt appartenant à Λ et dominant $\overline{\nu}$. $\overline{\nu}$ étant fini nous pouvons poser $\overline{\lambda} = \overline{\nu}\left(T_\infty \otimes \Pi\right)$, valeur de $\overline{\nu}$ sur les tautologies de $\overline{CP}$. D'après le lemme précédent, nous avons en outre $\overline{\nu} = \overline{\lambda}$ sur tout ω tel que $S_\lambda(\omega) = \overline{\lambda}$. Nous allons montrer que le temps d'arrêt $\nu_{\overline{\lambda}}$ domine $\overline{\nu}$. Nous nous aiderons du lemme:

LEMMA 6. *Soit $\overline{\nu}$ un temps d'arrêt tel que $\overline{\nu}(T_\infty \otimes \Pi) = \overline{\lambda}$, et $t \leq \overline{\lambda}$ tel que $\overline{\nu} \geq t$ sur B_t, le temps d'arrêt ν' défini par:*

$$\begin{aligned} \nu' &= t \text{ sur } B_t \\ &= \overline{\nu} \text{ sur } B_t^c \end{aligned}$$

domine $\overline{\nu}$. (B_t^c désigne le complémentaire de B_t dans $\overline{CP} \otimes \Pi$)

Proof. . *Remarquons tout d'abord que ν' est bien un temps d'arrêt. En effet $B_t \in \overline{\mathcal{B}}^t$ de même que B_t^c. Sur B_t, $\nu \geq t$, puisque la seule manière de s'arrêter sur une suite de 1 est d'expérimenter jusqu'à λ. Donc déjà, pour $n < t$, $(\nu')^{-1}(n) = (\nu)^{-1}(n) \in B_n$.*

Pour $n \geq t$:
$(\nu')^{-1}(n) = \left((\nu')^{-1}(n) \cap B_t^c\right) \cup \left((\nu')^{-1}(n) \cap B_t\right)$
$(\nu')^{-1}(n) = \left((\overline{\nu})^{-1}(n) \cap B_t^c\right) \cup \left((\nu')^{-1}(n) \cap B_t\right)$
$(\nu')^{-1}(n) = \left((\overline{\nu})^{-1}(n) \cap B_t^c\right) \cup \left(1_{n=t}.B_t\right)$

Comme $B_t \in \overline{\mathcal{B}}^n$ pour $n \geq t$, $\left((\overline{\nu})^{-1}(n) \cap B_t^c\right) \in \overline{\mathcal{B}}^n$ et $\left(1_{n=t}.B_t\right) \in \overline{\mathcal{B}}^n$ pour $n \geq t$ et donc $(\nu')^{-1}(n) \in \overline{\mathcal{B}}^n$. ν' est donc bien un temps d'arrêt.

Nous avons

$$X\left(\nu_n, \nu, \overline{\nu}\right) = \ell.E\left(1_{CP}.Z^{\nu}_{\nu_n,\nu,\overline{\nu}}\right) + (1-\ell).E\left(1_{\overline{CP}}.Z^{\overline{\nu}}_{\nu_n,\nu}\right)$$

et

$$X\left(\nu_n, \nu, \nu'\right) = \ell.E\left(1_{CP}.Z^{\nu}_{\nu_n,\nu,\nu'}\right) + (1-\ell).E\left(1_{\overline{CP}}.Z^{\nu'}\right)$$

$$
\begin{aligned}
X_{\nu_n,\nu,\nu'} - X_{\nu_n,\nu,\overline{\nu}} \geq{} & \ell.E\left(1_{CK}\right).\left(X_{\nu_n,\nu,\nu'} - X_{\nu_n,\nu,\overline{\nu}}\right) \\
& + (1-\ell).E\left(\alpha^{\overline{\nu}}.1_{B_t^c}\right).\left(X_{\nu_n,\nu,\nu'} - X_{\nu_n,\nu,\overline{\nu}}\right) \\
& + (1-\ell).E\left(1_{B_t}\left(M^t - E^t\left(M^{\overline{\nu}}\right)\right)\right) \\
& + (1-\ell).\alpha^t.E\left(1_{B_t}\right).\left(X_{\nu_n,\nu,\nu'} - X_{\nu_n,\nu,\overline{\nu}}\right)
\end{aligned}
$$

soit:

$$
\begin{aligned}
X_{\nu_n,\nu,\nu'} - X_{\nu_n,\nu,\overline{\nu}} \geq{} & (1-\ell).E\left(1_{B_t}\left(M^t - E^t\left(M^{\overline{\nu}}\right)\right)\right) \\
+ & \left(\begin{array}{c} \ell.E\left(1_{CP}\right) + (1-\ell).E\left(\alpha^{\overline{\nu}}.1_{B_t^c}\right) \\ +(1-\ell).\alpha^t.E\left(1_{B_t}\right) \end{array}\right).\left(X_{\nu_n,\nu,\nu'} - X_{\nu_n,\nu,\overline{\nu}}\right)
\end{aligned}
$$

$0 < \left(\ell.E\left(1_{CP}\right) + (1-\ell).E\left(\alpha^{\overline{\nu}}.1_{B_t^c}\right) + (1-\ell).\alpha^t.E\left(1_{B_t}\right)\right) < 1$ *donc le signe de* $X_{\nu_n,\nu,\nu'} - X_{\nu_n,\nu,\overline{\nu}}$ *est déterminé par le signe de* $E\left(1_{B_t}.\left(M^t - E^t\left(M^{\nu}\right)\right)\right)$. *Nous allons pour le déterminer nous aider de la proposition:*

PROPOSITION 8. *Pour* $t' \geq t$, $M^{t'}$ *est une supermartingale positive sur* B_t.

Proof. . $M^{\overline{\nu}} = \alpha^{\overline{\nu}}.R.\left(\overline{p} - \sum_k \overline{\mu}_k^{\overline{\nu}}.\overline{p}.\overline{f}_k\right)$. *Du fait que* $\sum_k \overline{\mu}_k^{\overline{\nu}}.\overline{f}_k \leq 1$. *cette quantité est positive. Si au temps* $t' \geqslant t$ *un agent a la distribution de probabilité* $p_\varphi(t')$ *(avec dans ce cas particulier* $\overline{\mu}_\infty^{t'} = 0$ *), au pas de temps suivant* $t'+1$, *il aura la distribution* $\left(\overline{\mu}_1^{t'+1}, ..., \overline{\mu}_q^{t'+1}, 0\right)$ *telle que:*

$$
\forall k \neq 0, \overline{\mu}_k^{t'+1} = \varphi(e(t'+1)).\frac{\overline{\mu}_k^{t'}.\theta_k}{\sum_{j=1}\overline{\mu}_j^{t'}.\theta_j} + (1 - \varphi(e(t'+1))\frac{(1-\theta_k).\overline{\mu}_k^{t'}}{\sum_{j=1}\overline{\mu}_j^{t'}.(1-\theta_j)}
$$

LEMMA 9. *En notant* $\rho_{t'}$ *la probabilité que le résultat* $\varphi(\mathcal{E}(t'+1))$ *de la prochaine expérience soit 1 :*

$$
\rho_{t'} = \sum_{j=1}^{s} \overline{\mu}_j^{t'}.\theta_j
$$

et

$$
\forall k \neq 0, \overline{\mu}_k^{t'+1} = \varphi(\mathcal{E}(t'+1)).\frac{\overline{\mu}_k^{t'}.\theta_k}{\rho_{t'}} + (1 - \varphi(\mathcal{E}(t'+1))\frac{(1-\theta_k).\overline{\mu}_k^{t'}}{1-\rho_{t'}}
$$

$E^{t'}\left(M^{t'+1}\right)$ *est la moyenne des espérances de gain relativement aux résultats* $\varphi(\mathcal{E}(t'+1)) = 1$ *et* $\varphi(\mathcal{E}(t'+1)) = 0$:

$$
\begin{aligned}
E^{t'}\left(M^{t'+1}\right) = {} & \rho_{t'}.\alpha^{t'+1}R.\overline{p}\left(1 - \sum_{k=1}^{s}\frac{\overline{\mu}_k^{t'}.\theta_k}{\rho_{t'}}.\overline{f}_k\right) \\
& + (1-\rho_{t'}).\alpha^{t'+1}R.\overline{p}\left(1 - \sum_{k=1}^{s}\frac{(1-\theta_k).\overline{\mu}_k^{t'}}{1-\rho_{t'}}.\overline{f}_k\right)
\end{aligned}
$$

ce qui se simplifie en:

$E^{t'}\left(M^{t'+1}\right) = \alpha.\alpha^{t'}R.\overline{p}\left(1-\sum_{k=1}^{s}\overline{\mu}_k^{t'}.\overline{f}_k\right)$
$E^{t'}\left(M^{t'+1}\right) = \alpha.M^{t'}$

Comme $M^t \geq 0$ *et que* $\alpha \leq 1$, *nous avons bien que* $E^{t'}\left(M^{t'+1}\right) \leq M^{t'}$ *sur* B_t *pour* $t' \geq t$. *Donc* M^t *est bien une supermartingale positive sur cet espace.* ■

Pour conclure, nous utiliserons le théorème suivant sur les supermartingales positives:

THEOREM 10. *(Neveu,). Soit* (X_n) *une supermartingale positive, pour tout couple de temps d'arrêt* (ν_1, ν_2), $X_{\nu_1} \geq E^{\nu_1}(X_{\nu_2})$ *p.s sur* $\{\nu_1 \leq \nu_2\}$ *.[1]*

Prenons dans notre cas $\nu_1 = t$ et $\nu_2 = \overline{\nu}$, en nous restreignant à B_t, nous avons $M^t \geq E^t(M^{\nu})$, ce qui nous permet d'écrire

$$\left(1-\left(\ell.E\left(1_{CP}\right)+(1-\ell).E\left(\alpha^{\overline{\nu}}.1_{B_t^c}\right)+(1-\ell).\alpha^t.E\left(1_{B_t}\right)\right)\right)\left(X_{\nu_n,\nu,\nu'}-X_{\nu_n,\nu,\overline{\nu}}\right) \geq 0$$

. et $X_0(\nu') - X_0(\nu) \geq 0$, ce qu'il fallait démontrer. Ceci permet de conclure que ν' domine $\overline{\nu}$. ■

Procédant ainsi par réductions successives sur tous les espaces B_t nous obtenons un temps d'arrêt dans Λ qui domine $\overline{\nu}$. De par sa construction, ce temps d'arrêt est précisément $\nu_{\overline{\lambda}}$. Ceci permet de conclure que le temps d'arrêt optimal pour $X_{\nu_n,\nu,\overline{\nu}}$ à ν_n et ν fixé, s'il existe, appartient à Λ. L'espérance de gain optimale est donc de la forme $X_{\nu_n,\nu,\nu_{\overline{\lambda}}}$ ■

B. Simulation du développement des connaissances pour une communauté d'agents

Ce programme est écrit pour mathématica 2.0. Les nombres entre crochets $\langle \mathbf{x} \rangle$ font référence à des parties de l'exposé théorique. Il est destiné à calculer les différents paramètres d'une société au cours de son évolution. Celle-ci est caractérisée par son niveau théorique s et son niveau technologique n, les proportions $(\overline{\mu}_k)$ des types dans le domaine de recherche, le rapport $\frac{R}{G}$, le taux d'actualisation α (noté a dans le programme) et la richesse du domaine de recherche r. nu est le pas de temps considéré pour les différentes phases. to est le nombre de phases que prend en compte la simulation. Age est l'âge limite de la communauté au bout duquel la simulation s'arrête. Nous aurons souvent à résoudre le système

$$(1):\begin{cases} X_0 = u.X\left(n,\lambda,\overline{\lambda}\right)+v \\ \overline{X_0} = \overline{u}.X\left(n,\lambda,\overline{\lambda}\right)+\overline{v} \\ X\left(n,\lambda,\overline{\lambda}\right) = \overline{d}\,(n)\,\overline{X_0}+d\,(n)\,.X_0 \end{cases} \qquad \langle \mathbf{5.1} \rangle$$

posé précédemment donnant les espérances initiales caractéristiques des différents processus de recherche à savoir X, $X0$, et $X0b$ ($\overline{X}_0$ est noté $X0b$. De manière générale, $\overline{\exp}$ est noté expb). Pour le début de la vie de la communauté, le paramètre σ est pris arbitrairement parmi des valeur faible. Ici il est égal à 0.01.

```
Clear[m]
Clear[lam]
Clear[lamb]
muib={7.869356097806654*10^-6, 0.000912845307345572,
0.02555966860567601,0.230037017451084, 0.598096245372818,
0.1453863539069779};
R=5;
n=30;
s=5;
a=.9995;
r=.0003;
sigma=0.01;
(* donnée des bornes d'exploration *)
m1=0; m2=12;
dm=4;
lam1=1;
lamb1=1;
(* τmax = Age)
Age=6000;
```

-

```
{{"R",R},{"n",n},{"s",s},{"a",a},{"r",r},{"sigma",sigma},{"m1",m1},{"m2",m2},
{"dm",dm},{"lam1",lam1},{"lam2",lam2},{"dlam",dlam},{"lamb1",lamb1},
{"lamb2",lamb2},{"dlamb",dlamb},{"nu",nu},{"to",to}
```

-

```
(* calcul des profondeurs d'exploration en lam et lamb *)
Lam[lam_]:=lam+20;
dLam[lam_]:=Ceiling[Lam[lam]/5];
Lamb[lamb_]:=lamb+20;
dLamb[lamb_]:=Ceiling[Lamb[lamb]/5];
```

-

(* Pour que l'interpolation linéaire de la dynamique ne diverge pas trop, il ne faut pas que pendant une phase donnée, le nombre des théories qui changent de statut soit trop important par rapport au nombre de théories que comportent les différents domaines. Nous imposerons que cette proportion ne dépasse pas un certain pourcentage de CP ou $\overline{CP}$. Nous prendrons comme seuil ici 10%. Cela nous donne nu en fonction de σ et θ. *)

```
Nu[r_,sigma_,teta_]:=Min[sigma*teta/r, (1-sigma)/r];
```

-

(* calcul des μ_k^t et $\overline{\mu}_k^t$ noté respectivement mu0 ou mu1 et mu0b ou mu1b. Le nombre 0 ou 1 indique si le résultat de l'expérience au temps t est 0 ou 1 *)

```
ClearAll[S1t]
S1t[s_,muib_,t_]:=muib[[s+1]]+Sum[(1-1/2^k)^t*muib[[k]],{k,1,s}]
```

-

```
ClearAll[Mu1b]
Mu1b[s_,muib_,t_]:= Append[Table[(1-1/2^k)^t*muib[[k]]/S1t[s,muib,t],{k,1,s}],
muib[[s+1]]/ S1t[s,muib,t]]
```

-

```
ClearAll[S0t]
S0t[s_,muib_,t_]:=Sum[1/2^k*(1-1/2^k)^(t-1)*muib[[k]],{k,1,s}]
```

-

```
ClearAll[Mu0b]
Mu0b[s_,muib_,t_]:= Append[Table[1/2^k*(1-1/2^k)^(t-1)*muib[[k]]/S0t[s,muib,t],
{k,1,s}],0]
```

-

```
(* calcul des mu01b *)
ClearAll[Mu01b]
Mu01b[n_,s_,muib_,lamb2_]:=
Block[{ mu0b=Table[Mu0b[s,muib,t],{t,1,lamb2}],
    mu1b=Table[Mu1b[s,muib,t],{t,1,lamb2}]},
```

```
{mu0b,mu1b} ]
```

⟨4.1⟩

```
(* calcul de l et d, b indique si les processus de bCP sont plus avantageux que les processus de CP ie Xb>X *)
Dn[b_,a_,sigma_,m_]:=
(1-b)*sigma*(1-a^(m+1)*(1-sigma)^(m+1))/(1-a*(1-sigma))+b*a^m*sigma^(m+1)
Db[b_,a_,sigma_,m_]:=(1-b)*a^m*(1-sigma)^(m+1)+b*(1-sigma)*
(1-a^(m+1)*sigma^(m+1))/(1-a*sigma)
L[b_,a_,sigma_,m_]:=Dn[b,a,sigma,m]/(Dn[b,a,sigma,m]+Db[b,a,sigma,m])
```

⟨4.2⟩

```
(* calcul du temps de recherche moyen *)
ClearAll[Tp]
Tp[b_,s_,a_,mui_,muib_,m_,l_,lam_,lamb_]:=
l[[b+1]]*(Sum[mui[[k]]*(t*a^t/2^k*(1-1/2^k)^(t-1)),{t.1,lam},{k,1,s}]+
Sum[mui[[k]]*lam*a^lam*(1-1/2^k)^lam,{k,1,s}]+mui[[s+1]]*a^lam*lam)+
(1-l[[b+1]])*(Sum[muib[[k]]*(t*a^t/2^k*(1-1/2^k)^(t-1)), {t,1,lamb},{k,1,s}]+
Sum[muib[[k]]*lamb*a^lamb*(1-1/2^k)^lamb,{k,1,s}]+muib[[s+1]]*a^lamb*lamb)+
(1-b)*(sigma*Sum[t*a^t*(1-sigma)^t,{t,0,m}]+m*a^m*(1-sigma)^(m+1))+
b*((1-sigma)*Sum[t*a^t*sigma^t,{t,0,m}]+m*a^m*sigma^(m+1))
```

⟨5.3⟩

```
(* calcul des fk, fkb et des risques *)
ClearAll[F]
Fb[a_,lamb_,k_]:=Sum[a^t*(1/2^k)*(1-(1/2^k))^(t-1).{t,1,lam}]
ClearAll[Fk]
Fk[s_,a_,lam_]:=Table[F[a,lam,k],{k,1,s}]
ClearAll[Fb]
Fb[a_,lamb_,k_]:=Sum[a^t*(1/2^k)*(1-(1/2^k))^(t-1),{t,1,lamb}]
ClearAll[Fkb]
Fkb[s_,a_,lamb_]:=Table[Fb[a,lamb,k],{k,1,s}]

ClearAll[Ri1]
Ri1[b_,s_,a_,r_,sigma_,mu1b_,fk_,fkb_,l_,tp_,t_]:=Sum[mu1b[[t,k]]*
(Min[1,r*(1-l[[b+1]])*a/((1-a)*(1-sigma)*tp[[b+1]])*fkb[[k]]]+
Min[1,r*l[[b+1]]*a/((1-a)*sigma*tp[[b+1]])*fk[[k]]]),{k.1,s}]
```

```
ClearAll[Gf]
Gf[b_,s_,a_,r_,sigma_,mu0b_,fkb_,l_,tp_,t_]:=Sum[mu0b[[t,k]]*
Min[1,r*(1-l[[b+1]])*a/((1-a)*(1-sigma)*tp[[b+1]])* (1-fkb[[k]])],{k,1,s}]
```

-

⟨ 5.2 ⟩

-

```
(* coefficients u et v *)
ClearAll[Ub]
Ub[s_,a_,muib_,lamb_]:=a*(muib[[s+1]]*a^lamb+Sum[muib[[k]]*
(a^lamb*(1-1/2^k)^lamb+a/2^k*(1-a^lamb*(1-1/2^k)^lamb)/
(1-a*(1-1/2^k))),{k,1,s}])
```

-

```
ClearAll[Vb]
Vb[b_,s_,a_,r_,R_,sigma_,muib_,mu0b_,mu1b_,lamb_,fk_,fkb_,l_,tp_]:=
muib[[s+1]]*a^lamb+Sum[muib[[k]]*a^lamb*(1-1/2^k)^lamb,{k,1,s}]+
R*(Sum[muib[[k]]*a^t*1/2^k*(1-1/2^k)^(t-1)*
Gf[b,s,a,r,sigma,mu0b,fkb,l,tp,t],{k,1,s},{t,1,lamb}]-
Sum[muib[[k]]*a^lamb*(1-1/2^k)^lamb*
Ri1[b,s,a,r,sigma,mu1b,fk,fkb,l,tp,lamb],{k,1,s}]-
muib[[s+1]]*a^lamb*Ri1[b,s,a,r,sigma,mu1b,fk,fkb,l,tp,lamb])
```

-

```
ClearAll[U] U[s_,a_,teta_,mui_,lam_]:=
a*teta*Sum[mui[[k]]*a^t*1/2^k*(1-1/2^k)^(t-1),{k,1,s},{t,1.lam}]+(1-teta)*a
```

-

```
ClearAll[V]
V[s_,a_,R_,teta_,mui_,lam_]:=
R*teta*Sum[mui[[k]]*a^t*1/2^k*(1-1/2^k)^(t-1),{k,1,s},{t,1,lam}]
```

-

(* calcul du gain associé à une stratégie donnée $(\nu_m, \nu_{lam}, \nu_{lamb})$ *)

```
ClearAll[Xs]
Xs[s_,a_,r_,R_,sigma_,teta_,mui_,muib_,mu0b_,mu1b_,m_,lam_,lamb_]:=
Block[{
     d=Table[Dn[b,a,sigma,m],{b,0,1}],
     db=Table[Db[b,a,sigma,m],{b,0,1}],
     l=Table[L[b,a,sigma,m],{b,0,1}],
     fk=Fk[s,a,lam], fkb=Fkb[s,a,lamb]},
     Block[{
          tp=Table[Tp[b,s,a,mui,muib,m,l,lam,lamb],{b,0,1}]},
          Block[{
```

```
                    ub=Ub[s,a,muib,lamb],
                    u=U[s,a,teta,mui,lam],
                    v=V[s,a,R,teta,mui,lam]},
Block[{
vb=Table[Vb[b,s,a,r,R,sigma,muib,mu0b,mu1b,lamb,fk,fkb,l,tp],{b,0,1}],
Block[{
    sol=Flatten[NSolve[{
    X==d[[1]]*X0+db[[1]]*X0b,
    X0==u*X+v,
    X0b==ub*X+vb[[1]]},
    {X,X0,X0b}]],
    solb=Flatten[NSolve[{
    X==d[[2]]*X0+db[[2]]*X0b,
    X0==u*X+v,
    X0b==ub*X+vb[[2]]},
    {X,X0,X0b}]]},
        Block[{
            S0={X/.sol[[1]],X0/.sol[[2]],X0b/.sol[[3]]},
            S1={X/.solb[[1]],X0/.solb[[2]],X0b/.solb[[3]]}},
            {S0,S1}
]]]]]

(* recherche de la stratégie optimale *)
ClearAll[XLmax]
XLmax[b_,s_,a_,r_,R_,sigma_,teta_,mui_,muib_,mu0b_,mu1b_lam2_,dlam_,lamb2_,dlamb_]:=
Block[{
    TXs=Table[Xs[s,a,r,R,sigma,teta,mui,muib,mu0b,mu1b,m,lam,lamb][[b+1,1]],
    {m,m1,m2,dm},{lam,lam1,lam2,dlam},{lamb,lamb1,lamb2,dlamb}]},
        Block[{
            xmax=Max[TXs]},
                Block[{
                    pos=Flatten[Position[TXs,xmax]]},
Block[{
    lmax=Flatten[{m1+dm*(pos[[1]]-1),lam1+dlam*(pos[[2]]-1),
    lamb1+dlamb*(pos[[3]]-1)}]},
{xmax,lmax}
]]]]
```

⟨**7.1** ⟩

(* définition de Δ_k et $\overline{\Delta}_k$ et des nouveaux paramètres *)

```
ClearAll[Dekb]
Dekb[b_,muib_,l_,fkb_,nb_,k_]:=-muib[[k]]*(1-l[[b+1]])*nb*(1-fkb[[k]])
```

```
ClearAll[Sigma]
Sigma[b_,s_,r_,sigma_,muib_,l_,fkb_,nb_]:=
1-Max[(1-sigma)+r*NSum[Dekb[b,muib,l,fkb,nb,k],{k,1,s}]-
r*muib[[s+1]]*(1-l[[b+1]])*nb,0]
```

```
ClearAll[Nuib]
Nuib[b_,s_,r_,sigma_,muib_,l_,fkb_,nb_,tsigma_]:=
Table[If[tsigma<1, Max[(muib[[k]]*(1-sigma)+r*Dekb[b,muib,l,fkb,nb,k])/(1-tsigma),0],
1/(s+1)],{k,1,s}]
ClearAll[Muib]
Muib[b_,s_,r_,sigma_,muib_,l_,fkb_,nb_,tsigma_]:=
Append[Nuib[b,s,r,sigma,muib,l,fkb,nb,tsigma],
1-Plus@@Nuib[b,s,r,sigma,muib,l,fkb,nb,tsigma]]
```

```
ClearAll[Dek]
Dek[b_,a_,r_,sigma_,teta_,mui_,muib_,l_,fk_,fkb_,tp_,nb_,k_]:=
-(1-Min[1,fkb[[k]]*r*(1-l[[b+1]])*a/((1-a)*(1-sigma)*tp[[b+1]])])
*Dekb[b,muib,l,fkb,nb,k]- mui[[k]]*teta*l[[b+1]]*nb*fk[[k]]
```

```
ClearAll[Teta]
Teta[b_,a_,r_,sigma_,teta_,mui_,muib_,l_,fk_,fkb_,tp_,nb_,tsigma_]:=
Min[1,Max[teta*sigma+
r*NSum[Dek[b,a,r,sigma,teta,mui,muib,l,fk,fkb,tp,nb,k],{k,1,s}]+
r*muib[[s+1]]*(1-l[[b+1]])*nb,0]]/tsigma
```

```
ClearAll[Nui]
Nui[b_,s_,a_,r_,sigma_,teta_,mui_,muib_,l_,fk_,fkb_,tp_,nb_,tsigma_,tteta_]:=
Table[Max[(mui[[k]]*teta*sigma+r*Dek[b,a,r,sigma,teta,mui,muib,l,fk,fkb,tp,nb,k])/
(tteta*tsigma),0],{k,1,s}]
ClearAll[Mui]
Mui[b_,s_,a_,r_,sigma_,teta_,mui_,muib_,l_,fk_,fkb_,tp_,nb_,tsigma_,tteta_]:=
Append[Nui[b,s,a,r,sigma,teta,mui,muib,l,fk,fkb,tp,nb,tsigma,tteta],
Plus@@Nui[b,s,a,r,sigma,teta,mui,muib,l,fk,fkb,tp,nb,tsigma,tteta]]
```

(* définition de la fonction centrale qui calcule les changements dans les paramètres d'une phase à l'autre *)

```
ClearAll[Dynamique]
Dynamique[nu_,n_,s_,a_,r_,R_,sigma_,teta_,mui_,muib_,m1_,m2_,lam1_,lam2_,dlam_,
lamb1_,lamb2_,dlamb_]:=
Block[{
    mu01b=Mu01b[n,s,muib,lamb2]},
    Block[{
        mu0b=mu01b[[1]],
        mu1b=mu01b[[2]]},
        Block[{
            xlmax0=XLmax[0,s,a,r,R,sigma,teta,mui,muib,mu0b.mu1b],
            xlmax1=XLmax[1,s,a,r,R,sigma,teta,mui,muib,mu0b.mu1b]},
            Block[{
                b=If[xlmax0[[1]]-xlmax1[[1]]<0,1,0]},
                Block[{
                    xlmax=If[b<.5,xlmax0,xlmax1]},
                                Block[{
                                    m=xlmax[[2,1]],
                                    lam=xlmax[[2,2]],
                                    lamb=xlmax[[2,3]]},
Block[{
    l=Table[L[i,a,sigma,m],{i,0,1}],
    fk=Fk[s,a,lam],
    fkb=Fkb[s,a,lamb]},
    Block[{
        tp=Table[Tp[b,s,a,mui,muib,m,l,lam,lamb],{b,0,1}]},
        Block[{
            nb=nu/tp[[b+1]]},
            Block[{
                tsigma=Sigma[b,s,r,sigma,muib,l,fkb,nb]},
                Block[{
                    tmuib=Muib[b,s,r,sigma,muib,l,fkb,nb,tsigma],
                    tteta=Teta[b,a,r,sigma,teta,mui,muib,l,fk,fkb,tp,nb,tsigma],
Block[{
    tmui=Mui[b,s,a,r,sigma,teta,mui,muib,l,fk,fkb,tp,nb,tsigma,tteta]},
    {xlmax[[1]],tsigma,tteta,tmui,tmuib,b,m,lam,lamb}
]]]]]]]]]]]
```

⟨ 7.2 ⟩

-

```
(* calculs spécifiques à la phase initilale *)
ClearAll[iTp]
iTp[s_,a_,muib_,lamb_]:=
Sum[muib[[k]]*(t*a^t/2^k*(1-1/2^k)^(t-1)),{t,1,lamb}.{k.1,s}]+
Sum[muib[[k]]*lamb*a^lamb*(1-1/2^k)^lamb,{k,1,s}]+muib[[s+1]]*a^lamb*lamb
```

-

```
ClearAll[iPb]
iPb[a_,r_,sigma_,fkb_,l_,itp_,k_]:=
Min[1,r*(1-l[[2]])*a/((1-a)*(1-sigma)*itp)*(1-fkb[[k]])]
```

-

```
ClearAll[iNui]
iNui[s_,a_,r_,sigma_,l_,muib_,lamb_,fkb_,itp_]:=
Table[(muib[[k]]*iPb[a,r,sigma,fkb,l,itp,k])/
(muib[[s+1]]+NSum[muib[[k]]*iPb[a,r,sigma,fkb,l,itp,k],{k,1,s}]),{k,1,s}]
ClearAll[iMui]
iMui[s_,a_,r_,sigma_,l_,muib_,lamb_,fkb_,itp_]:=
Append[iNui[s,a,r,sigma,l,muib,lamb,fkb,itp],muib[[s+1]]/
(muib[[s+1]]+NSum[muib[[k]]*iPb[a,r,sigma,fkb,l,itp,k],{k,1,s}])]
```

-

```
ClearAll[iTeta]
iTeta[muib_,pb_,fkb_]:= (muib[[s+1]]+NSum[muib[[k]]*fkb[[k]]*
(1-Min[1,r*(1-l[[2]])*a/((1-a)*(1-sigma)*tp[[2]])*fkb[[k]]]),{k,1,s}])/
(muib[[s+1]]+NSum[muib[[k]]*fkb[[k]],{k,1,s}])
```

-

```
(* calcul des gain associés à une stratégie donnée pour la phase initiale *)
ClearAll[iXs]
iXs[s_,a_,r_,R_,sigma_,muib_,mu0b_,mu1b_,m_,lam_,lamb_]:=
Block[{
    d=Table[Dn[b,a,sigma,m],{b,0,1}],
    db=Table[Db[b,a,sigma,m],{b,0,1}],
    l=Table[L[b,a,sigma,m],{b,0,1}],
    fk=Fk[s,a,lam],
    fkb=Fkb[s,a,lamb],
    itp=iTp[s,a,muib,lamb]},
    Block[{
        mui=iMui[s,a,r,sigma,l,muib,lamb,fkb,itp]},
            Block[{
```

```
                    tp=Table[Tp[b,s,a,mui,muib,m,l,lam,lamb],{b,0,1}]},
                    Block[{
                        ub=Ub[s,a,muib,lamb]},
                             Block[{
                                 teta=iTeta[muib,pb,fkb]},
                                 Block[{
                                     u=U[s,a,teta,mui,lam],
                                     v=V[s,a,R,teta,mui,lam},
Block[{
    vb=Table[Vb[b,s,a,r,R,sigma,muib,mu0b,mu1b,lamb,fk,fkb,l,tp],{b,0,1}]},
        Block[{
            solb=Flatten[NSolve[{
                X==d[[2]]*X0+db[[2]]*X0b,
                X0==u*X+v,
                X0b==ub*X+vb[[2]]},
                {X,X0,X0b}]]},
                Block[
                    { S1={X/.solb[[1]],X0/.solb[[2]],X0b/.solb[[3]]}},
                    {S1,mui,teta}
]]]]]]]]
```

-

```
ClearAll[iXLmax]
iXLmax[s_,a_,r_,R_,sigma_,muib_,mu0b_,mu1b_]:=
Block[{
    iTXs=Table[iXs[s,a,r,R,sigma,muib,mu0b,mu1b,m,lam,lamb][[1,1]],{m,m1,m2},
    {lam,1,10,2},{lamb,1,10,5}]},
    Block[{
        xmax=Max[iTXs]},
            Block[{
                pos=Flatten[Position[iTXs,xmax]]},
                Block[{
                lmax=Flatten[{pos[[1]]-1,lam1+dlam*(pos[[2]]-1),
                lamb1+dlamb*(pos[[3]]-1)}]},
{xmax,lmax}
]]]]
```

-

```
(* début du programme, calcul de la phase initiale *)
Clear[X]
Clear[X0]
```

```
Clear[X0b]

mu01b=Mu01b[n,s,muib,lamb2];
{"mu0b",mu0b=mu01b[[1]]};
{"mu1b",mu1b=mu01b[[2]]};

"to est mul"
ixlmax=iXLmax[s,a,r,R,sigma,muib,mu0b,mu1b]
X=ixlmax[[1]]
m=ixlmax[[2,1]]
lam=ixlmax[[2,2]]
lamb=ixlmax[[2,3]]
{{"im",m},{"iX",X},{"ilam",lam},{"ilamb",lamb}}
Clear[X]
{"ixs",ixs=iXs[s,a,r,R,sigma,muib,mu0b,mu1b,m,lam,lamb]}
{"muib",muib}
mui=ixs[[2]];
{"mui",mui}
teta=ixs[[3]];
{"teta",teta}
```

(* Calcul des paramètres des différentes phases avec un pas de temps de η jusqu'à ce que la société ait atteint l'âge *Age*. Pour chaque phase, est donné dans l'ordre gain, sigma, teta, mui, muib, b, m, lam, lamb puis Age, gain, sigma, teta, mui, muib, b, m, lam, lamb *)

```
{"xmax","sigma","teta","mui","muib","b","m","lam","lamb"}
For[i=1,i<to,i++,Print[ {{gain,tsigma,tteta,tmui,tmuib,b,m,lam,lamb}=
Dynamique[Nu[r,sigma,teta],n,s,a,r,R,sigma,teta,mui,muib,
m1,m2,lam1,Lam2[lam],dLam[lam],lamb1,Lamb2[lamb],dLamb[lamb]],
{Age,gain,sigma,teta,mui,muib,b,m,lam,lamb}=
{Age+Nu[r,sigma,teta],gain,tsigma,tteta,tmui,tmuib,b,m,lam,lamb}}]]
```

C. Approximations, contraintes

Nous résumons ici les contraintes qui ont été imposées dans la modéllisation.

1. $\frac{\frac{\langle T \rangle}{\langle \nu \rangle}}{|\Phi|} \ll 1$: un agent ne peut explorer qu'une toute petite partie de Φ au cours de sa vie.

2. $\overline{p} = \frac{r.(1-\ell)}{(1-\sigma)}.\frac{\langle T \rangle}{\langle \nu \rangle} < 1$: quand un agent tire une formule de CP, celle-ci a une probabilité inférieure à 1 d'avoir été examinée par un agent en activité (il n'y a pas saturation, cf. figure 5).

3. $G < R.\overline{p}$: cette condition est nécessaire pour que les agents aient un comportement "scientifique", i.e. qu'ils ne proposent pas une théorie dont ils ont la preuve qu'elle est fausse.

Bibliography

[1] "Discrete-Parameter Martingales", J. Neveu, ed. North-Holland Mathematical Library (1975)

[2] "Bayesian Theory", José M. Bernardo & Adrian F.M. Smith, ed. John Wiley & Sons (1994)

[3] "Logique and Structure", Van Dalen.

[4] "La Théorie des Jeux", Bernard Guerrien, ed. Economica (1995)

[5] "La logique de la découverte scientifique", Karl R. Popper, ed. Payot (1934)

[6] "Conjectures et réfutations", Karl R. Popper, ed. Payot (1962)

[7] "Vérité, rationalité et progrès de la connaissance scientifique", Conjectures et réfutations, Karl R. Popper, ed. Payot (1962)

[8] "Des sources de la connaissance et de l'ignorance", Conjectures et réfutations, Karl R. Popper, ed. Payot (1960)

[9] "La structure des révolutions scientifiques", Thomas S.Kuhn, ed. Flammarion (1970)